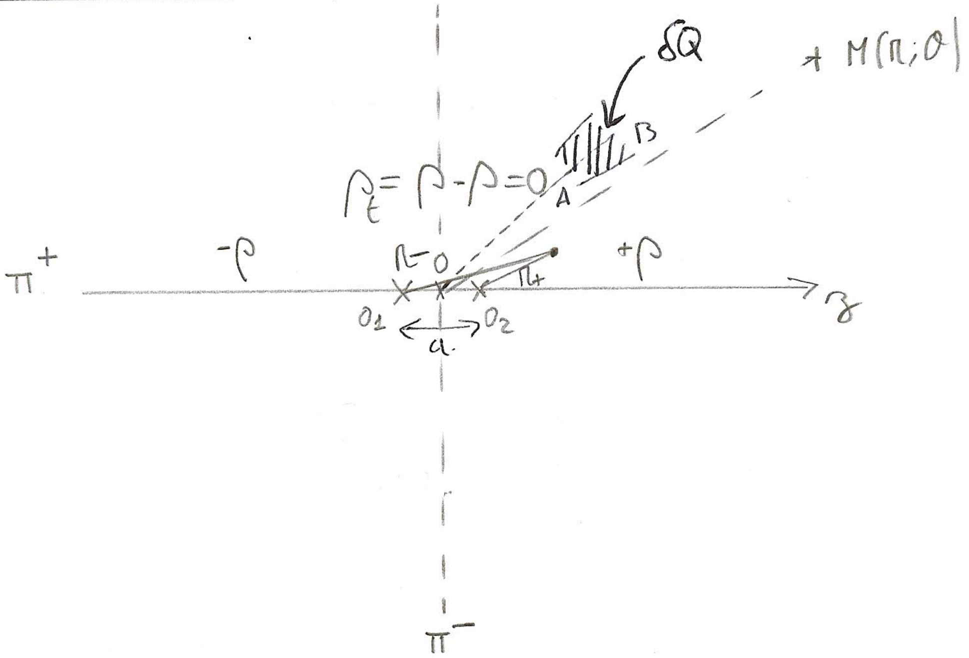
TD n°10 :

Dipôles électrostatique et magnétostatique

Exercice n°1 : Equivalence d'un Σ de deux sphères



① Niveau de symétrie faible $\Rightarrow$ on calcule séparément $\vec{E}_+$ et $\vec{E}_-$ puis superposition.

Sphère ⊕ : $\displaystyle\iint_{\text{Sphère}} \vec{E}_+ \cdot d\vec{S}_+ = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_+ \frac{4}{3}\pi r_+^3$

$\Rightarrow E_+ 4\pi r_+^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_+ \frac{4\pi}{3} r_+^3 \Rightarrow \vec{E}_+ = \frac{\rho_+}{3\varepsilon_0}\vec{O_2M}$

Sphère ⊖ : m̂ démarche : $\vec{E}_- = \frac{\rho_-}{3\varepsilon_0}\vec{O_1M}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{O_2M} - \vec{O_1M}\right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{O_2O_1} = \text{cte}}$$

② Région extérieure aux sphères : $\vec{E}_+ \equiv$ chp / potentiel d'une ch. ponctuelle en O_2 $\quad q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$

$\vec{E}_- \equiv$ ——————— O_1 $\quad -q$

$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ chp dipolaire à g^{de} distance donc $V(r_{ext}) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$ $\quad (r = OM)$

$p = qa = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho a$.

sol $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho a \frac{1\cos\theta}{r^2} = \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}\cos\theta$

$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{\sigma_0\cos\theta}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}}$

champ : $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V \Rightarrow \begin{cases} E_r = \frac{2\sigma_0\cos\theta}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3} \\ E_\theta = \frac{\sigma_0\sin\theta}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_r;\vec{e}_\theta}$

norme du chp : $\boxed{\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\left(3\cos^2\theta + 1\right)^{1/2}}$

③ Si $a \ll R \Rightarrow$ 2 sphères très proches quasi superposées.
mais couche superficielle chargée

$\delta Q = \rho\, AB\, dS \Rightarrow \sigma = \frac{\delta Q}{dS} = \rho AB$?

$AB = OB - OA = \left(\frac{a^2}{4} + R^2 + Ra\,\vec{e}_z\cdot\vec{e}_{r_B}\right)^{1/2} - \left(\frac{a^2}{4} + R^2 + aR\cos\theta\right)^{1/2}$

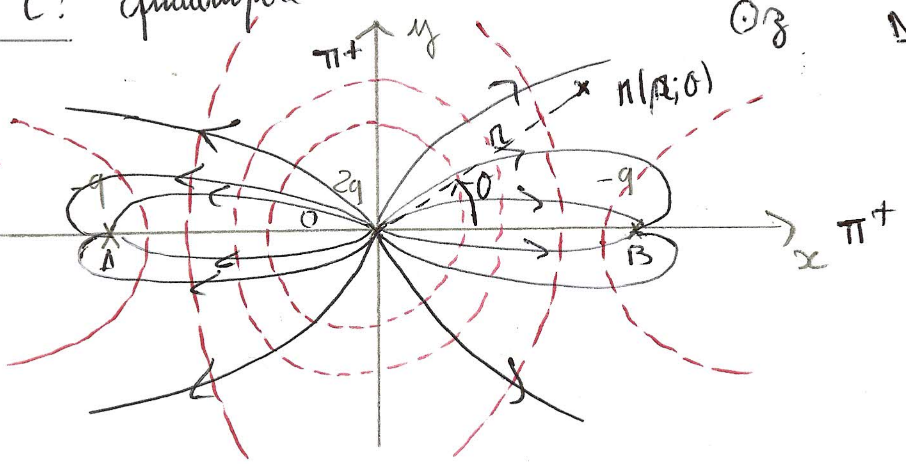
avec $\vec{OB} = \vec{OO_2} + \vec{O_2B} = \frac{a}{2}\vec{e}_z + R\,\vec{e}_{r_B}$
$\vec{OA} = \vec{OO_1} + \vec{O_1A} = -\frac{a}{2}\vec{e}_z + R\,\vec{e}_{r_A}$

DL1 $\Rightarrow AB = R\left(1 + \frac{a}{2R}\cos\theta\right) - R\left(1 - \frac{a}{2R}\cos\theta\right) = a\cos\theta$

donc : $\boxed{\sigma = \overbrace{\rho a}^{\sigma_0}\cos\theta}$

Exercice n° 2 : quadrupôle

LDC : —
Equi V : - - -



NB : pas d'intersection de 2 équipotentielles car correspondant à 2 valeurs ≠ du potentiel

② * $[yOz] = \pi^+ \Rightarrow V(r;\theta) = V(r;\pi-\theta)$

or $\cos\theta = -\cos(\pi-\theta) \neq \cos\theta$

ⓒ ⓓ et ⓗ à rejeter

* Pour $\theta = 0$ on aurait $V_c = V_g = 0 \; \forall r$ or plusieurs équipotentielles $\neq$ coupent l'axe $(Ox) \Rightarrow \neq$ valeurs de V

donc ⓒ et ⓖ à rejeter

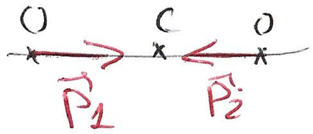
* Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ on aurait $V_a = V_e = 0 \; \forall r$ or idem ci-dessus plusieurs isoV coupent l'axe $[Oy) \Rightarrow \neq$ valeurs de V

donc ⓐ et ⓔ à rejeter

* On doit choisir entre ⓑ et ⓕ :

rappel : $V_{dip} = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ → caractéristique dipôle

→ CO_2 vue c 2 dipôles ⇒



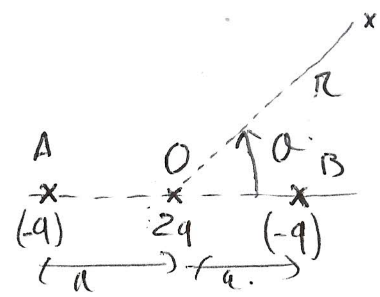
$\Rightarrow V_{dip} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\vec{P_1}\cdot\vec{e}_{r_1} + \vec{P_2}\cdot\vec{e}_{r_2}\right] = 0$

DL à l'ordre 1 ne suffit plus.

donc Solution en $\frac{1}{r^2}$ fausse ⇒ ⓕ à rejeter

③ Calcul explicite

$$V(r;\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{OM} - \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM}\right]$$



$OM = r$

$$AM = r\Big(1 + \underbrace{\frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r}\cos\theta}_{\varepsilon_1}\Big)^{1/2}$$

$$BM = r\Big(1 + \underbrace{\frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}\cos\theta}_{\varepsilon_2}\Big)^{1/2}$$

NB : $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \approx 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{3}{8}\varepsilon^2$

donc :

$$V(r;\theta) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[2 - \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon_1^2 + 1 - \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon_2^2\right)\right]$$

$$V(r;\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}\left[\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} - \frac{3}{8}\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{3}{8}\left(4\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos^2\theta + 4\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos^2\theta\right)\right]$$

soit $$\boxed{V(r;\theta) = \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[1 - 3\cos^2\theta\right]}$$

③ Identification de A : $\boxed{A = \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0}}$

④ Chp $\vec{E}(r)$:

$$\vec{E} = \frac{+qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\begin{pmatrix} 3(1-3\cos^2\theta) \\ -6\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}_{(\hat{e}_r;\hat{e}_\theta)}$$

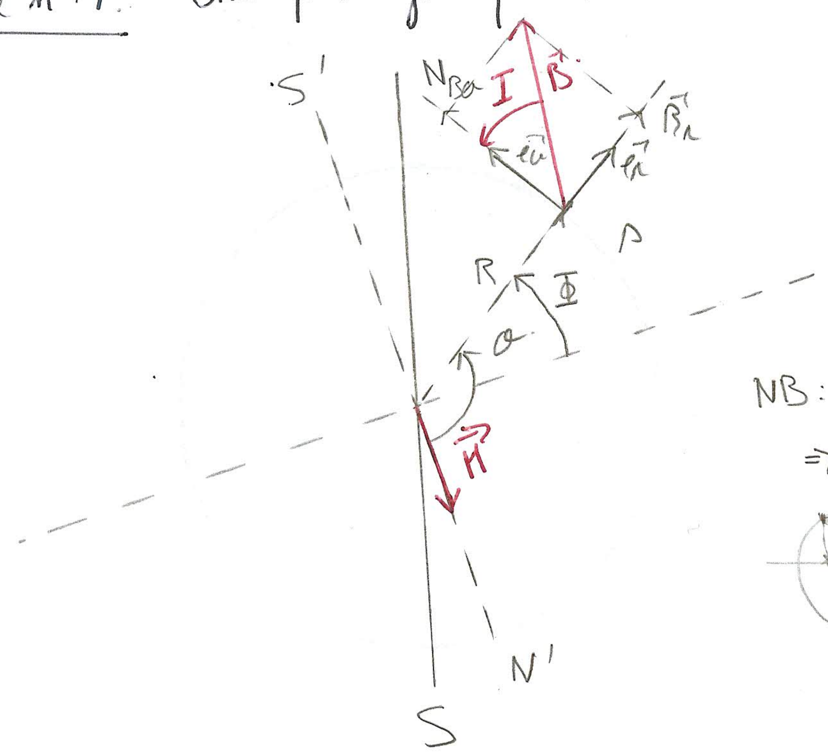
⑤ Th Gauss : on choisit une surface sphérique centrée en O et de rayon $r \gg a$.

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint E_r \cdot dS = \frac{3qa^2 r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\int_0^{\pi}(1-3\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

$$= \frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, 2\pi \times \left\{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} + 3\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi}\right\}.$$

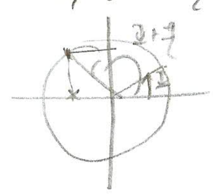
$$= \frac{3qa^2}{2\varepsilon_0 r^2}\left\{2 + \left[-1-1\right]\right\} = 0 \quad \underline{\text{OK!}}$$

Exercice n°7 : Champ magnétique terrestre



NB : $\Phi = \theta - \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \Phi$



$\cos(\Phi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\Phi$

et $\sin\theta = \cos\Phi$

① Cp dipolaire :
$$\begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi}\dfrac{2\cos\theta}{R^3} \\ B_\theta = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi}\dfrac{\sin\theta}{R^3} \end{cases} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\left(1 + 3\cos^2\theta\right)^{1/2}}$$

A.N. $B_{exp}(\text{Paris}) = \dfrac{8{,}3.10^{15}}{6378.10^3}\left(1 + 3\cos^2(90+52)\right)^{1/2}$

$=$

NB : $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\left(1+3\cos^2\theta\right)^{1/2} = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\left(1 + 3\sin^2\Phi\right)^{1/2}}$

et $I = \text{arctg}\left(\dfrac{B_r}{B_\theta}\right) = \text{arctg}\left(\dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

or $\begin{cases} \cos\theta = -\sin\Phi \\ \sin\theta = \cos\Phi \end{cases} \Rightarrow I = -\text{arctg}\left(\dfrac{2\sin\Phi}{\cos\Phi}\right) \Rightarrow \boxed{I = -\text{arctg}(2\,\text{tg}\,\Phi)}$

AN : $B(\text{Paris}) = 5{,}41.10^{-5}$ T

$I(\text{Paris}) = -68{,}66°$

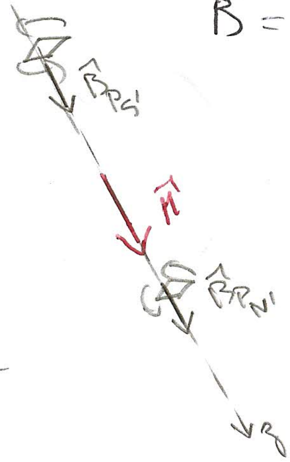
② Boussole s'aligne selon les LDC

$\Rightarrow$ or aux pôles LDC $\equiv$ position de Gauss. $\Rightarrow$ $\boxed{B_\theta = 0}$

$\vec{B} = B_r \, \vec{e}_r|_{\text{pôle}}$

$\vec{e}_r|_{\text{pôle}} = \vec{e}_z$

© <u>la boussole ne peut s'orienter</u>



③ Equation polaire cf cours : $\rho = \rho_0 \sin^2\theta$

à l'équateur $\rho = r_e$.

donc identifie la LDC $\boxed{r = r_e \sin^2\theta}$

NB $\sin\theta = \cos\Phi$

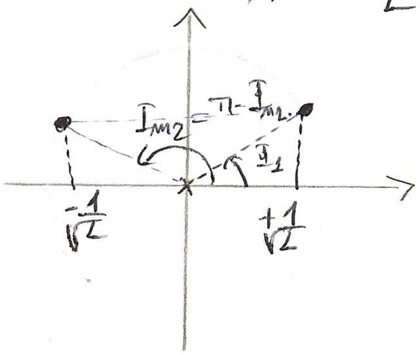
$$B = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\left(1+3\sin^2\Phi\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\mu_0 M}{4\pi r_e^3}\,\frac{\left(1+3\sin^2\Phi\right)^{1/2}}{\cos^6\Phi} = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\,\frac{1}{L^3}\left(\frac{1+3\sin^2\Phi}{\cos^{12}\Phi}\right)^{1/2}$$

<u>Intersection</u> : si $r = r_e \sin^2\theta = R \Rightarrow \sin^2\theta = \cos^2\Phi = \frac{1}{L}$

$\Rightarrow \cos\Phi_m = \pm\frac{1}{L}$

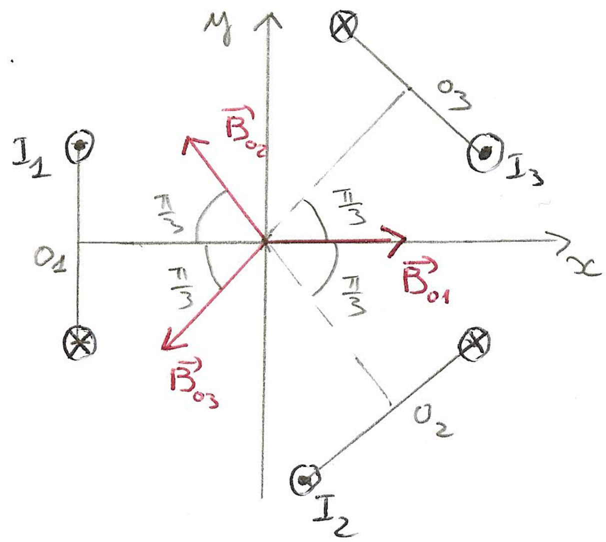
$\Rightarrow \boxed{\Phi_m = \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{L}}}$



Correction du Problème TD n°10

Partie exercice guidé

(H) 3 bobines "décalées" de $\frac{2\pi}{3}$ entre-elles



(H) $I_1 = I_2 = I_3$

$\Rightarrow B_{01} = B_{02} = B_{03} = B_0$

1) a) $\vec{B} = B_0 \vec{e_x} - 2B_0 \overbrace{\cos\frac{\pi}{3}}^{=1/2} \vec{e_x} + B_0 \sin\frac{\pi}{6} e_y - B_0 \sin\frac{\pi}{6} \vec{e_y}$

$= \vec{0} \Rightarrow$ champ nul au centre.

b) Alimentation triphasée $\Rightarrow$ courant déphasés entre eux de $\frac{2\pi}{3}$

Idée "devinée": créer un champ tournant pour faire tourner un moment dipolaire que l'on placera en O (cf cours règle d'alignement du dipole avec le chp $\vec{B}$ par action type moment de Laplace)

$$\vec{B} = B_1 \vec{e_x} + B_2\left(-\frac{1}{2}\vec{e_x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_y}\right) + B_3\left(-\frac{1}{2}\vec{e_x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_y}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 - \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \\ (B_2 - B_3)\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}_{\vec{e_x}, \vec{e_y}}$$

Idée : passage en complexe $B_m \sim I_m(t)$

$$B_m = B_0 \cos\left(\omega t - (m-1)\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \underline{B_m} = B_0\, e^{j\left(\omega t - (m-1)\frac{2\pi}{3}\right)} \\ \text{et } B_m = \mathrm{Re}\left[\underline{B_m}\right] \end{array} \right.$$

Composante selon x

$$\underline{B_x} = B_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{2} B_0 e^{j\omega t} \underbrace{\left(e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)}_{= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j} - \frac{1}{2} B_0 e^{j\omega t} \overbrace{\left(e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)}^{= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j}$$

$$= B_0 e^{j\omega t}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2} B_0 e^{j\omega t} = \frac{3}{2} B_0 (\cos\omega t + j \sin\omega t)$$

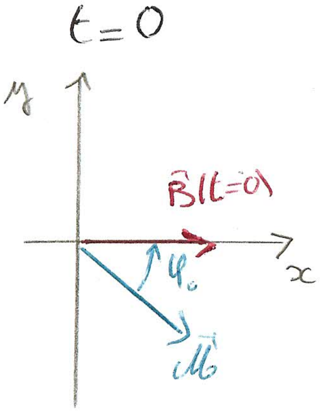
Composante selon y

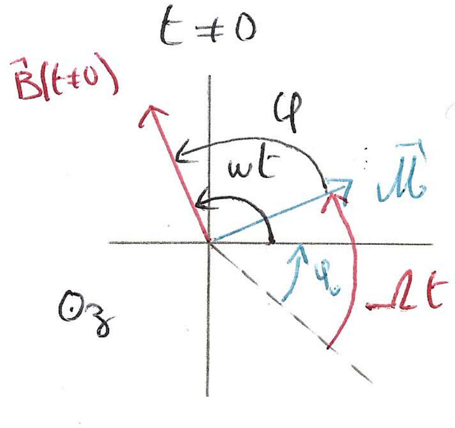
$$\underline{B_y} = \frac{\sqrt{3}}{2} B_0 e^{j\omega t}\left[e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} B_0 e^{j\omega t}\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right]$$

$$= -B_0 \frac{3}{2} j \; e^{j\omega t} = -\frac{3}{2} B_0 j (\cos\omega t + j \sin\omega t)$$

Retour champ réel : $\vec{B} = \mathrm{Re}\begin{bmatrix} \underline{B_x} \\ \underline{B_y} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} B_0 \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ chp tournant

2) ⚠ le dipole va s'orienter selon le champ





$$\varphi = \omega t - (\Omega t - \varphi_0) = (\omega - \Omega)t + \varphi_0$$

a) Couple subi par le dipôle

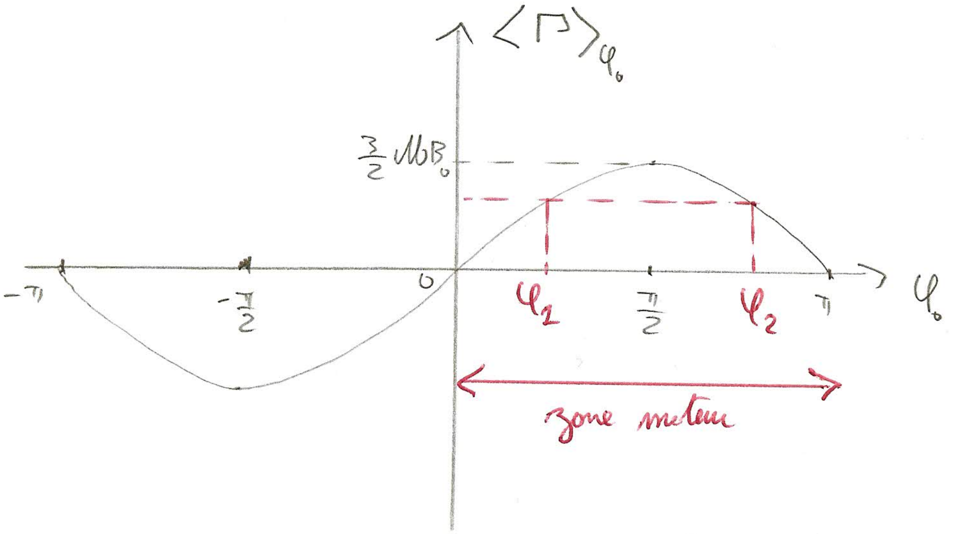
$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M} B \sin(\vec{\mathcal{M}}; \vec{B})\ \vec{e_z}$$

avec $(\vec{\mathcal{M}}; \vec{B}) = \varphi = (\omega - \Omega)t + \varphi$

$$\Rightarrow \langle \vec{\Gamma} \rangle = \mathcal{M} B \langle \sin(\omega - \Omega)t + \varphi_0 \rangle_t\ \vec{e_z}$$

non nul uniquement si $\omega = \Omega$ condition de synchronisme.

$$\begin{cases} \langle \vec{\Gamma} \rangle_{\omega \neq \Omega} = \vec{0} \\ \langle \vec{\Gamma} \rangle_{\omega = \Omega} = \frac{3}{2} \mathcal{M} B \underbrace{\langle \sin \varphi_0 \rangle}_{cte} \vec{e_z} = \frac{3}{2} \mathcal{M} B_0 \sin \varphi_0\ \vec{e_z} \end{cases}$$



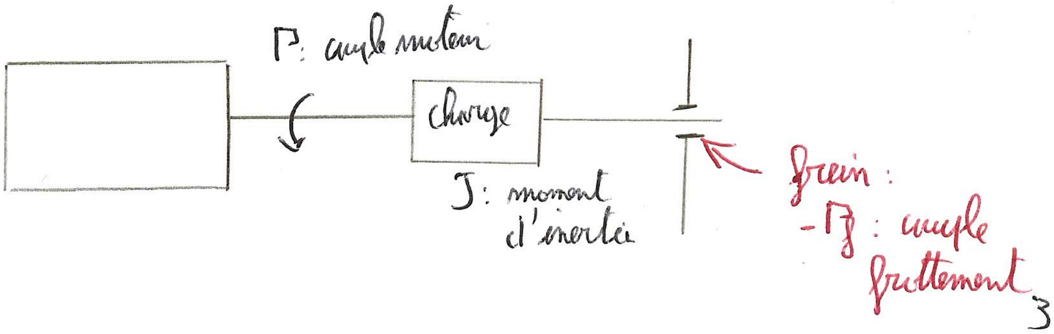
$\Rightarrow$ Couple maximal possible : $\langle \Gamma \rangle_{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \mathcal{M} B_0$

Démarrage à vide : à $t = 0^+$ $\omega \neq 0$ mais $\Omega = 0$ car inertie du rotor

$\Rightarrow \Gamma(0^+) = 0$ le moteur ne peut démarrer seul.

3) Partie Problème

modélisation :



$\underline{\text{TMC:}}$ $J\dot{\Omega} = \Gamma(\varphi_0) - \Gamma_f$

$= 0$ car régime permanent

NB: $\Gamma_f < \Gamma_{max} = \frac{3}{2} \mathcal{M} B_0$

2 positions possibles :

$\varphi_0 = \varphi_2 \Rightarrow$ si léger freinage $\varphi_0 \nearrow$ et $\langle \Gamma(\varphi_0) \rangle \searrow$ le moteur ne va pas rattraper le le champ

$\Rightarrow$ le moteur "décroche" puis s'arrête.

$\varphi_0 = \varphi_1 \Rightarrow$ ——————— $\varphi_0 \nearrow$ et $\langle \Gamma(\varphi_0) \rangle \nearrow$ le moteur va rattraper le champ

$\Rightarrow$ le moteur a un fonctionnement stable

conclusion : $[0 ; \frac{\pi}{2}]$: zone stable

$[\frac{\pi}{2} ; \pi]$: zone instable